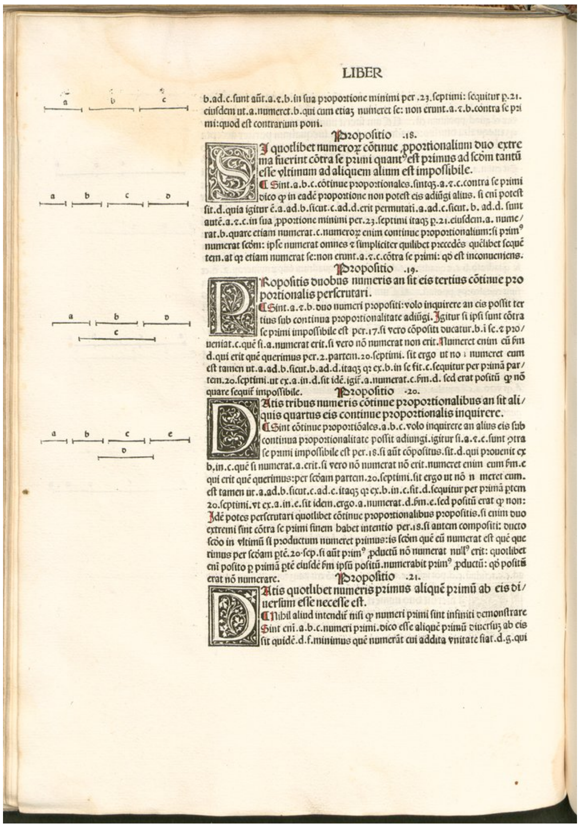
. DM01.B : L'ensemble des nombres premiers est infini.

Cette preuve figure dans les Éléments d'Euclide, c'est la proposition 20 du livre IX. Le théorème y est énoncé sous la forme : « les nombres premiers sont plus nombreux que n'importe quelle multitude de nombres premiers proposée ». Euclide démontre que de trois nombres premiers distincts peut se déduire un quatrième. La démonstration se généralise à toute énumération finie de nombres premiers. Il déduit que les nombres premiers sont en nombre plus important que toute quantité finie. L'objet de ce devoir est de marcher dans les pas d'Euclide et de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

1. On considère la liste L des nombres premiers : 2, 3, 5.
   (a) Calculer leur produit et l'augmenter de 1.
   (b) Obtient-on un nombre premier ? Était-il dans la liste L ?
2. On va raisonner ***par l'absurde***, c'est-à-dire que l'on va supposer le contraire de ce que l'on veut démontrer, et essayer d'aboutir à une contradiction.
   Supposons donc que l'ensemble des nombres premiers est ***fini***, et forme une liste $L = \{2; 3; 5; 7; ...; P\}$.
   On note $n = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times ... \times P + 1$ leur produit augmenté de 1.
   (a) Expliquer pourquoi n est un entier, et pourquoi n ne peut pas être un nombre premier.
   (b) Expliquer pourquoi n admet au moins un diviseur premier, que l'on notera q.
   (c) Expliquer pourquoi q divise $(n-1)$, et pourquoi q divise n.
   (d) En déduire, en utilisant l'un des résultats de l'exercice 1.4, que q divise 1.
   (e) Dire pourquoi nous avons abouti à une contradiction et pouvons conclure que notre hypothèse de départ ("L'ensemble des nombres premiers est fini") est fausse. Conclure.


LIBER

Essayez de chercher ce DM sans aide, mais si vous êtes bloqué, vous pourrez trouver des indications sur le site ***http ://maths.langella.free.fr/*** *, rubrique Espace lycéen / Seconde / Devoirs maison.*

. Indications pour le DM01.B : L'ensemble des nombres premiers est infini.

1. On considère la liste L des nombres premiers : 2, 3, 5.
   (a) Calculer leur produit et l'augmenter de 1.
   Indications : *Le produit est le résultat d'une multiplication.*
   "Augmenter" signifie que l'on fait une addition.
   (b) Obtient-on un nombre premier ? Était-il dans la liste L ?
   Indications : *Pour savoir si votre résultat est premier, vous pouvez utiliser le crible d'Eratosthène vu au DM01.A*
2. On va raisonner ***par l'absurde***, c'est-à-dire que l'on va supposer le contraire de ce que l'on veut démontrer, et essayer d'aboutir à une contradiction.
   Supposons donc que l'ensemble des nombres premiers est ***fini***, et forme une liste $L = \{2;3;5;7;...;P\}$.
   On note $n = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times ... \times P + 1$ leur produit augmenté de 1.
   (a) Expliquer pourquoi n est un entier, et pourquoi n ne peut pas être un nombre premier.
   Indications : *Lorsque l'on multiplie des entiers, qu'obtient-on ? Et lorsqu'on les ajoute ?*
   (b) Expliquer pourquoi n admet au moins un diviseur premier, que l'on notera q.
   Indications : *On pourra s'aider d'une propriété du cours.*
   (c) Expliquer pourquoi q divise $(n-1)$, et pourquoi q divise n.
   Indications : *Écrire ce que vaut* $(n-1)$ *en fonction des nombres premiers jusqu'à* P.
   Pour $q|n$, *utiliser la question précédente.*
   (d) En déduire, en utilisant l'un des résultats de l'exercice 1.4, que q divise 1.
   Indications : *Exprimer simplement* 1 *en fonction de* $(n-1)$ *et* n.
   (e) Dire pourquoi nous avons abouti à une contradiction et pouvons conclure que notre hypothèse de départ ("L'ensemble des nombres premiers est fini") est fausse. Conclure.
   Indications : *Quels sont les diviseurs de* 1 *? Que peut-on en déduire pour* q *?*